

断熱圧縮・膨張による圧力・温度変化の理論計算

12-23-2015
Tohei Moritani

1) 目的

図のような筒とピストンは外部との熱の出入りは無い断熱系とする。筒の内部は空気で、体積が V_i から V_f に変化した時の圧力と温度の変化を計算する。

2) 理論式

基本式

$$\text{ポアソンの法則} \quad P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \quad (1)$$

$$\text{比熱比} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2)$$

$$\text{熱力学第一法則} \quad Q = \Delta U + W, \quad Q = 0 \text{ (断熱)} \quad (3)$$

$$\text{気体がした仕事} \quad W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \frac{P_i V_i}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right\} \quad (4)$$

$$\text{理想気体の内部エネルギー} \quad \Delta U = n C_v \Delta T \quad (5)$$

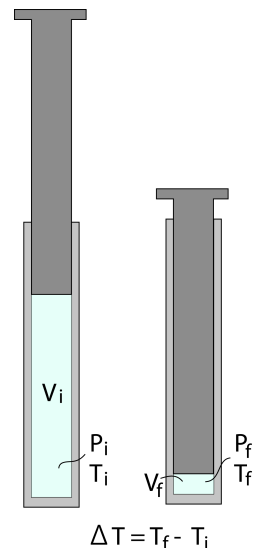


Fig. 1

3) 理論計算式

$$\text{初期条件} \quad T_i = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}, \quad P_i = 1.00 \text{ atm} = 1.03 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (6)$$

$$\text{比熱 (空気)} \quad C_v = \frac{5}{2} R = 20.8, \quad C_p = \frac{7}{2} R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1.4 \quad (7)$$

$$\text{圧縮比} \quad \alpha = \frac{V_i}{V_f} \quad (8)$$

$$(1) \text{と} (6) \sim (8) \text{ より、} \quad P_f = P_i \alpha^\gamma = 1.03 \times 10^5 \alpha^{1.4} \quad (9)$$

(5)と(3)より、

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta U}{n C_v} = -\frac{W}{n C_v} = \frac{1}{n C_v} \frac{P_i V_i}{\frac{C_p}{C_v} - 1} (\alpha^{\gamma-1} - 1) = \frac{R T_i}{P_i V_i} \frac{P_i V_i}{R} (\alpha^{\gamma-1} - 1) \\ &= T_i (\alpha^{\gamma-1} - 1) = 300 (\alpha^{0.4} - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

4) 計算結果

圧縮比 α を横軸に取り、圧力を Fig. 2 に、温度を Fig. 3 に示した。

5) 考察

温度変化 ΔT の圧縮比依存性の式、(10)、が予想に反して極めて単純な式になったのが興味深い。断熱条件下では、圧縮比を 5、つまり体積を 20% まで圧縮すればおよそ 300°C となる。また、圧縮比を 0.25、つまり体積を 4 倍に膨張すれば -100°C となることが示された。

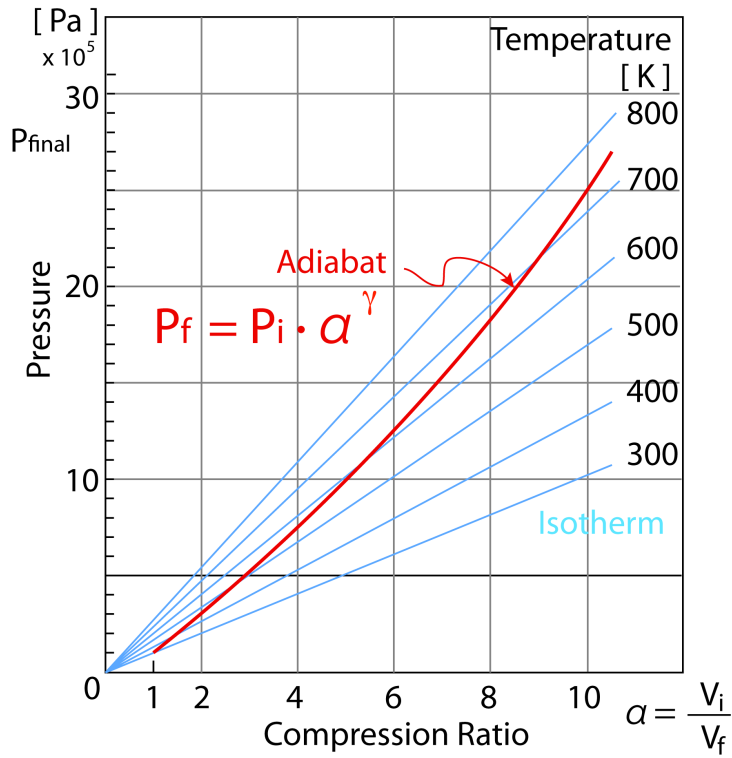


Fig. 2 断熱変化における、圧力の圧縮比依存性 ($P_i = 1.03 \times 10^5$ Pa)

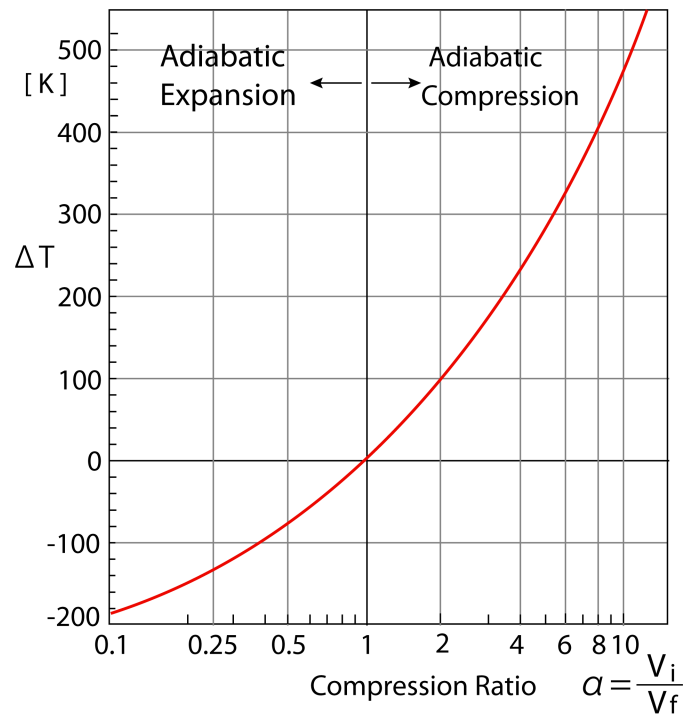


Fig. 3 断熱変化における、温度変化 ΔT の圧縮比依存性