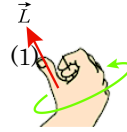


歳差運動

1. 慣性モーメント I 、を有するコマが角速度 $\vec{\omega}$ で反時計回りの回転運動をしている。

2. このとき、コマは次の大きさの角運動量、 $\vec{L}$ 、を持つ。

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



$\vec{L}$ の向きは、「右手親指の向き」(約束事)

3. コマを鉛直上向きから ϕ だけ傾ける。コマの質量を m とすると、重心に $\vec{F} = m\vec{g}$ の重力が鉛直下向きに働く。この重力がコマの角運動量 $\vec{L}$ に及ぼす影響を検討する。

4. 重心の位置(高さ)を $\vec{h}$ とすると、コマに次の力のモーメント、 $\vec{\tau}$ 、が働く。

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{h} \times m\vec{g} \quad (2)$$

5. 上の式で、「 $\times$ 」は、ベクトル積(外積)で、 $\vec{\tau}$ の向きは「3指」または「右手親指」で決まる向きであり、重力の向きに垂直である。

6. $\vec{\tau}$ の大きさは、 $\tau = mgh \sin \phi$ (3)

7. $\vec{\tau}$ が運動におよぼす効果は、「回転運動方程式」で求められる。

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha} = I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (4)$$

8. 上式より、 $\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t$ (5)

9. 式(5)より、 $\vec{\tau}$ がはたらくと角運動量は $\vec{\tau}$ と同じ向きに $\Delta \vec{L}$ だけ変化する。つまり、重力がはたらく向きにコマの軸は動かずそれに直交する水平の向きに動く。このためコマは倒れず立ち続ける。また、 $\vec{L}$ の向きを絶えず変化させ、歳差運動を起こす。

10. 歳差運動は、角運動量 $\vec{L}$ の水平成分 $L \sin \phi$ を半径とする円運動で表され次が成り立つ。

$$\Delta \vartheta \approx \frac{\Delta L}{L \sin \phi} \quad (6)$$

11. 歳差運動の角速度 ω_p

$$\omega_p = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t L \sin \phi} = \frac{\tau \Delta t}{\Delta t L \sin \phi} = \frac{mgh \sin \phi}{L \sin \phi} = \frac{mgh}{L} = \frac{mgh}{I \omega} \quad (7)$$

(6)

(5)

(3)

(1)

12. ω_p は、コマの傾斜角 ϕ に依存せず、コマの回転が速い (ω 大) ほど、慣性モーメント (I) が大きいほど、重心の位置 $h > 0$ が低いほど小さい。コマが反時計回りであれば歳差運動も反時計回りになる。

13. 重心の位置がコマの支点に一致すれば軸が傾いていても歳差運動は起こらず(マクスウェルのコマ)。重心の位置が支点より低ければ逆回転になる。

