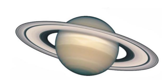
12^{th} Physics 4

Rotational Motion　剛体の回転運動
Universal Gravitation 万有引力

2016-17

回転するこまはなぜ立ち続けられるのだろう？



1． 等角速度回転運動

		Angular	Linear	
1	Angle	θ	x	Displacement
2	Angular Velocity	$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ [rad/s]	$v \equiv \frac{dx}{dt}$ [m/s]	Velocity
3	Angular Acceleration	$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$ [rad/s²]	$a \equiv \frac{dv}{dt}$ [m/s²]	Acceleration
4	Motion with a constant α	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$	$v = v_0 + a t$ $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2 a x$	Motion with a constant a

[Q33] 風が止んだので 2.1 rad/s で回っていた風車の回転が遅くなる。角加速度が 0.45 rad/s² として、完全に停止する時間を求めよ。


Fig. 33

[Q37] 図の滑車は反時計回りに回っている。つり下げたおもりが回転速度を下げていてその回転角加速度は−2.10 rad/s² である。(a) 回転速度の初期値が 5.40 rad/s のとき、回転が停止するまでの時間を求めよ。(b) この時間内に滑車が回転する角度はいくらか。

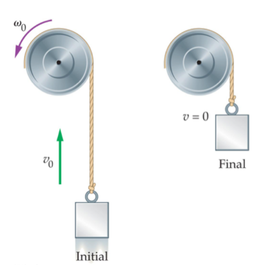
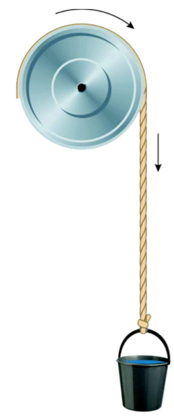


Fig. 37

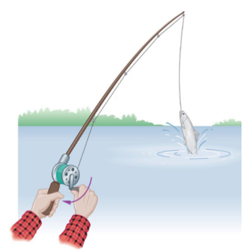
5. 接線加速度　Tangential Acceleration

$a_t = r\,\alpha$　　[m/s²]

2.　回転運動と直線運動の関係



[Q38] 図の滑車で、ある時刻に角速度−8.4 rad/s、角加速度−2.8 rad/s² で回転している。(1) 2.0 s 後の角速度はいくらか。
(2) 2.0 s 間に何回回転したか。
(3) 滑車の半径が 32 cm とする時、バケツが 2.0 s 間に移動した距離を求めよ。



[Q39] As a fisherman reels in a “big one,” he turns the spool on his fishing reel with a radius of 3.7 cm at the rate of 3.0 complete revolutions every second.　What is the linear speed of the fishing line as it is reeled in?
釣り人が「大物」を引き上げている。半径 3.7 cm のリールを毎秒ちょうど 3.0 回転で回している。巻かれている釣り糸の線速度はいくらか。

３．　回転運動エネルギーと慣性モーメント

Rotational Kinetic Energy and the Moment of Inertia

		Angular	Linear	
6	Moment of Inertia	$I \equiv \sum m_i r_i^2$　[kg·m²]	m　[kg]	Mass
7	Rotational Kinetic Energy	$K^r = \frac{1}{2} I \omega^2$　[J]	$K^\ell = \frac{1}{2} m v^2$　[J]	Linear Kinetic Energy

[Q43] 図に示すようなダンベル型の物体の慣性モーメントを求めよ。回転中心は物体の中心にあり、２個の物体は質点として扱えるものとする。

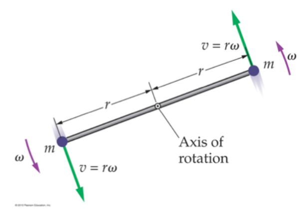


Fig. 43

[Q44] 半径 0.610 m のグラインダーで斧を研ぐ。(a) 斧に対するグラインダーの線速度が 1.50 m/s で、グラインダーの回転運動エネルギーが 13.0 J であるとき、慣性モーメントはいくらか。(b) 線速度が２倍の 3.00 m/s のときの回転運動エネルギーはいくらか。

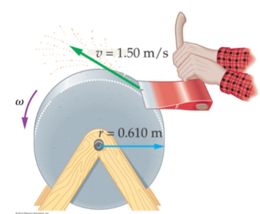


Fig. 44

[Q46] 右の図のダンベル型の物体を中心を軸にして回すのと、端を軸にして回すのでは慣性モーメントはどう違うか。

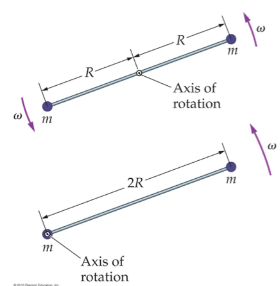
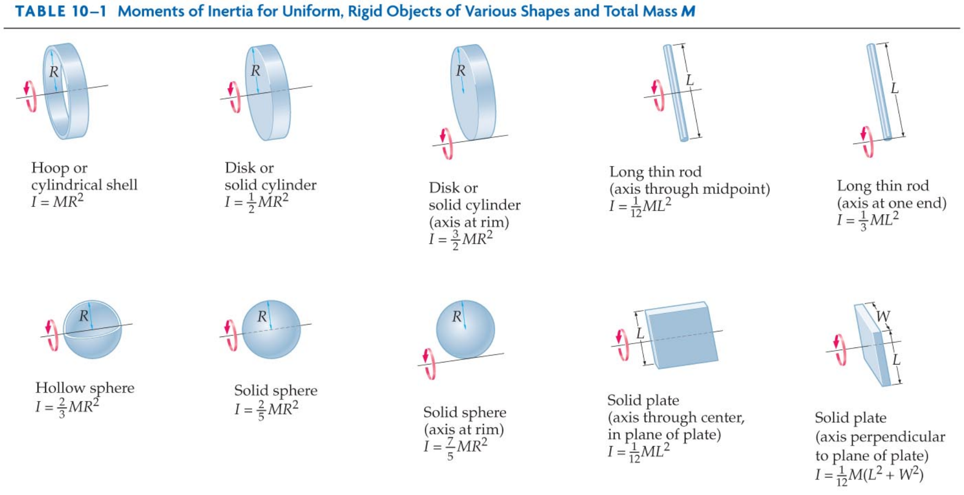


Fig. 46

TABLE 10–1 Moments of Inertia for Uniform, Rigid Objects of Various Shapes and Total Mass *M*



４．　回転体の運動エネルギーと力学的エネルギー保存則

8. 回転運動の運動エネルギー

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

9	Conservation of Mechanical Energy	$K^r + K^\ell + U = const.$	

[Q47] 半径 10.0 cm で、質量 1.20 kg の円盤がすべらずに転がっている。円盤の並進速度が 1.41 m/s のとき、(a) 並進運動エネルギー、(b) 回転運動エネルギーおよび(c) 全運動エネルギーを求めよ。

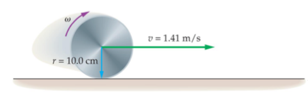


Fig. 47

[Q48] 同じ質量と半径を持つ円盤とリングを斜面の上から放した。どちらが先に下に着くか。

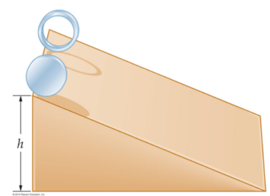


Fig. 48

[Q49] 球を、すべりのない面の上から放した。最下点に達した後は摩擦の無い表面を上っていく。ボールが達する最も高い点は出発点と比べて、高いか、低いか、同じか。

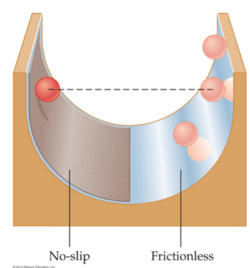


Fig. 49

[Q50] 半径 R で慣性モーメントが I の回転体の円周のまわりに巻き付けたひもに質量 m の物体が取り付けられている。回転体は自由に回転でき、ひもに滑りはない。t=0 で回転体が角速度 ω で回転し物体は v で上昇している。物体が停止するときの上がる高さを求めよ。

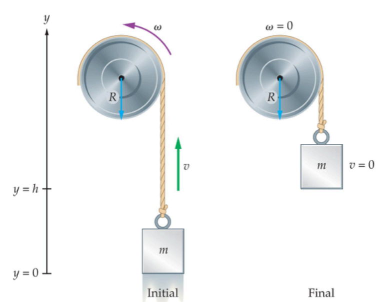


Fig. 50

[Q51] ヨーヨーを停止状態から糸の上端は静止させたまま降下させた。ヨーヨーの質量は 0.056 kg で、慣性モーメントは 2.9×10^{-5} kg・m²、糸を巻き付けている芯の半径は 0.0064 m である。ヨーヨーが 0.50 m 降下したときの並進速度はいくらか。

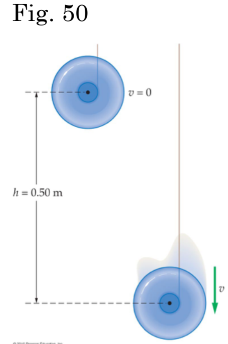
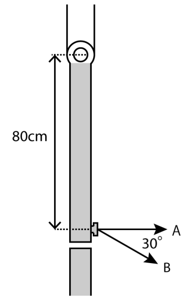


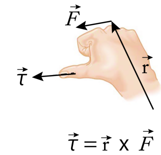
Fig. 51

５．　力のモーメント　　　Torque

		Angular	Linear	
10	Torque	$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$ $(\tau \equiv r F_{\perp})$ [N・m]	$\vec{F}$ [N]	Force

[Q53] Find the torque to open the door in Fig. 53 when a force of 5.0 N is applied: (A) the force is tangential or (B) at 30° relative to a tangential line.
ドアのノブを 5.0N の力で引いたときの回転軸のまわりの力のモーメントを求めよ。A の場合と B の場合について。



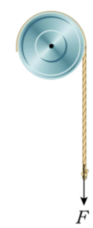


６．　回転運動方程式　（力のモーメントと角加速度）

Torque and Angular Acceleration

		Angular	Linear	
11	Equation of Motion-1	$\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$	$\sum \vec{F} = m \vec{a}$	Equation of Motion-1

[Q62] ディスク型の滑車に巻き付けた軽いひもを滑車の接線方向に 0.53 N の力で引いた。滑車の質量が 1.3 kg、半径が 0.11 m として、角加速度を求めよ。(W337)



[Q64] 右図で、どちらのおもりが先に地面に着くか。

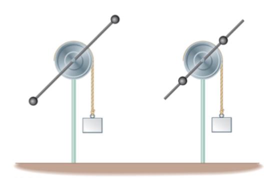


Fig. 64

[Q66]腕の長さ L の棒にいくつかのサイコロを載せて棒を放し自由回転させると先の方のサイコロの落下速度より棒の方が先に落ちる。サイコロが棒から離れる点はどこか。　(W339)

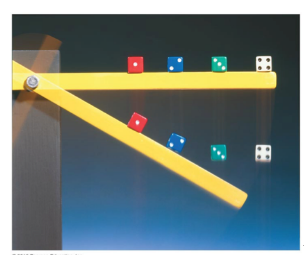


Fig. 66

（煙突の爆破では途中から折れる。）


Demolition of 150m chimney
In Poland (10-25-2012)

７． 回転運動方程式の応用

［Q67］右図は、ディスク型の滑車（半径 R、質量 M）の円周にひもを巻き付け、質量 m の物体をつり下げたものである。物体を放すと、物体は下方に加速度運動し、滑車は回転する。滑車は摩擦無く自由回転できるものとして、物体の加速度とひもの張力を求めよ。 (W350)

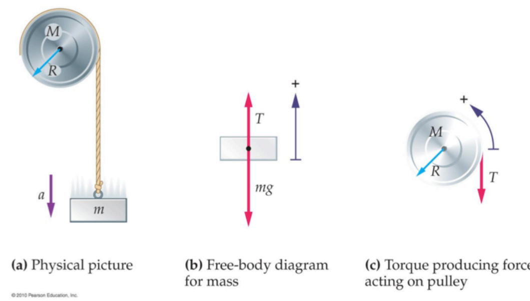


Fig. 67

[Q68] エアトラックの台車 (質量 0.31 kg) にひもをつけ、ひもをディスク型滑車（質量 0.080 kg、半径 0.012 m）に掛け、一定の力（1.1 N）で下方に引く。ひもの張力と台車の加速度を求めよ。

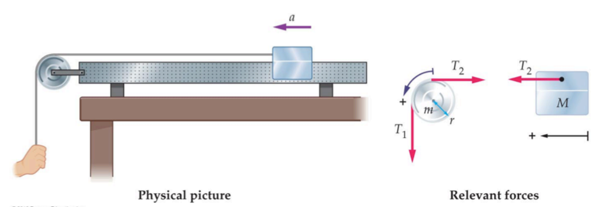


Fig. 68

８．　角運動量　Angular Momentum

		Angular	Linear	
12	Angular Momentum	$\vec{L} \equiv I\,\vec{\omega}$ [kg·m²/s] or [N·m·s] (Point Mass: $L = rmv$)	$\vec{p} \equiv m\,\vec{v}$	Linear Momentum
13	Equation of Motion-2	$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Equation of Motion-2

[Q69] 半径 7.5 cm で質量 0.13 kg の均質な円板が、1.15 rad/s の角速度で回っている。角運動量を求めよ。

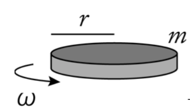


Fig. 69

[Q70] 95 kg の人が、半径 25 m の円形のトラックを 5.1 m/s で走っている。角運動量を求めよ。

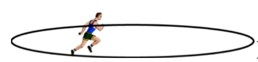


Fig. 70

[Q72] 質量 21.2 kg の子供が 4.10 m/s の速さで回転遊具に向かっている。回転遊具の半径は 2.00 m で、子供が進む角度は図の通りである。(a) 遊具の中心に対する子供の角運動量はいくらか。$L = rmv\,\sin\theta$を用いよ。(b) この問題における$r_{\perp}$はいくらか。(c) 子供の角運動量を$L = r_{\perp}mv$で求めよ。

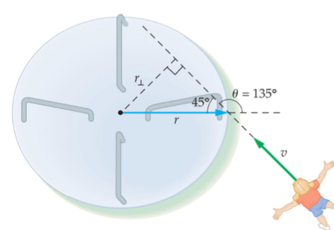


Fig. 72

[Q73] 弱い風を受けて風車に 255 N・m の力のモーメントを生じた。風車が初期状態で静止していたとして 2.00 秒後の角運動量を求めよ。　　　　　(W355)


Fig. 73

９．　角運動量保存則

Conservation of Angular Momentum

		Angular	Linear	
14	Conservation law	$\vec{L} = \vec{L'}$ or $I\,\vec{\omega} = I'\overrightarrow{\omega'}$ $(when \sum \vec{\tau} = 0)$	$\Sigma\,\vec{p} = \Sigma\,\vec{p'}$ or $\Sigma\, mv = \Sigma m'v'$ $(when \sum \vec{F} = 0)$	

[Q74] 物理のデモ実験で、生徒が両手に鉄アレイを持って回転椅子に座る。最初に腕を伸ばし角速度 3.72 rad/s で回転する。このときの慣性モーメントは 5.33 kg・m² である。回転中に腕を縮めて胸に置くと慣性モーメントは減少して 1.60 kg・m² となる。(a) 腕を縮めた後の角速度はいくらか。(b) 腕を縮める前後の角運動量を求めよ。　[W356]

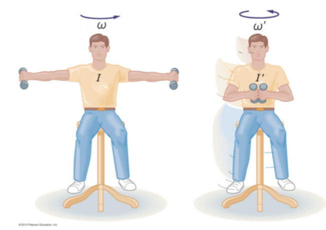
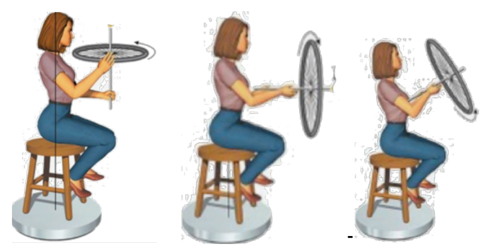


Fig. 74

[75] (a) 静止している回転台の上で車輪を上に向け、上から見て反時計回りに回転させると何が起こるか。それはなぜか。
(b,c) 静止している回転台の上で車輪を右に向け､右から見て反時計回りに回転させると何が起こるか。続いて右側を上にむける(c)と何が起こるか。それはなぜか。



(a)　　(b)　　(c)

[Q76] 半径 R = 2.3 x 10⁸ m の星が角速度 ω = 2.4 x 10⁻⁶ rad/s で回転している。もしこの星が崩壊を起こし(collapse)て半径 20.0 km になったら、その角速度はいくらになるか。星は均質で崩壊で質量は変化しないと仮定する。
（右図は、このような崩壊で生じたと考えられる蟹座のパルサーpulsar である。）　　[W357]

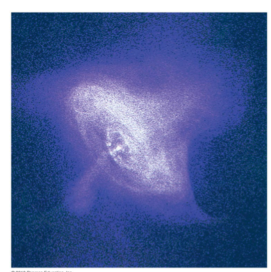


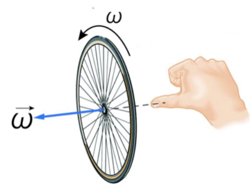
Fig. 76

[Q77] スケート選手が腕を縮めて慣性モーメントを１／２にして角加速度を２倍にした。彼女の運動エネルギーは増えたか、減ったか、変わらないか。

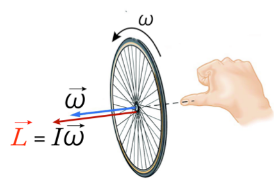
Fig. 77

１０．回転運動のベクトル的性質

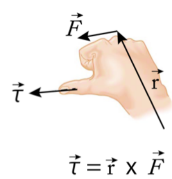
1. 角速度ベクトル$\vec{\omega}$の向き



2. 角運動量ベクトル$\vec{L}$の向き



3. 力のモーメント Torque の向き

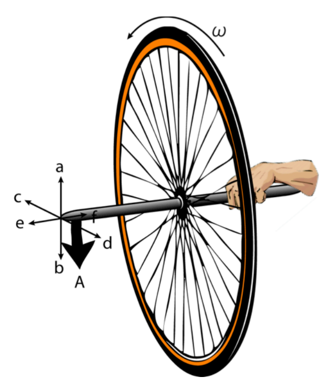


4. 回転体に力が加わった時の挙動（力のモーメントと角運動量変化）

運動方程式　$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$　→　$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\,\Delta t$

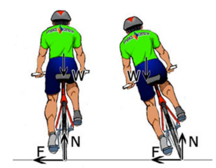
１１．ジャイロ効果、回転するコマはなぜ立ち続けるか

[Q81] 物理のデモ実験で、車輪の軸を図のように持ち支える。車輪を図のように回転させ軸を太い矢印の方向（鉛直上方）に動かそうとしたときに、車輪の軸が移動を示す向きを、a～f から選べ。

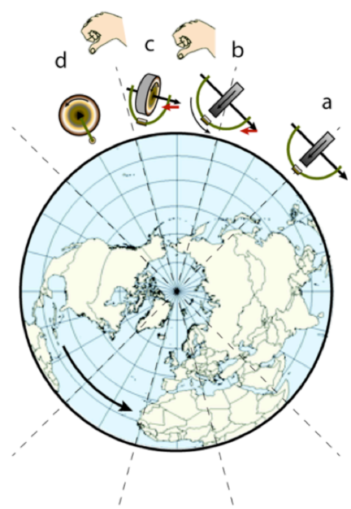


[Q82] 転がるコインは倒れにくい。なぜか。

[Q84] 子供の遊びの輪回し(Hoop rolling, Hoop trundling) で方向を変えるとき輪に垂直の向きに押せば良いという。なぜか。



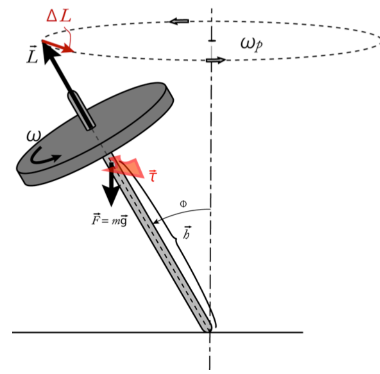
[Q85] オートバイ、自転車で右折や左折するとき傾けるのはなぜか。



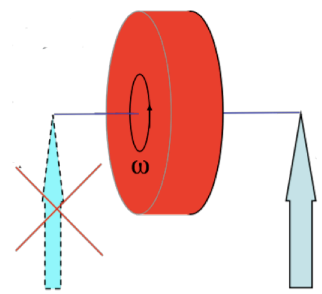
[Q86] ジャイロコンパス Gyrocompass の軸は常に北を指す。

原理を説明せよ。

[Q91] まわっているコマが立ち続けるのはなぜか。

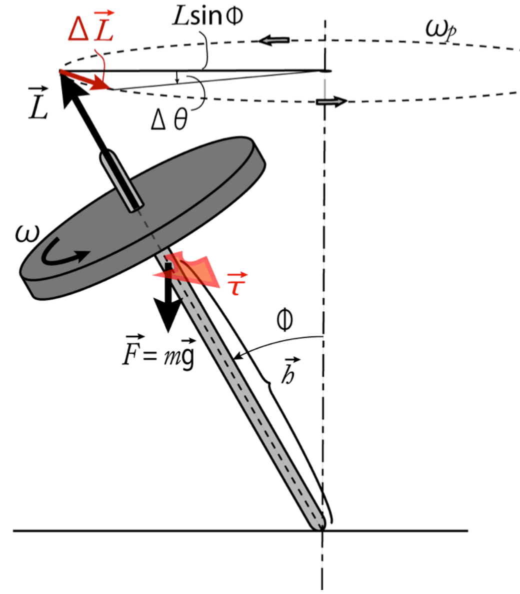


[Q92] 地球ゴマ（Gyroscope)を２箇所で支え横向きで回し一方の支えを外す。何が起こるか。



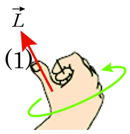
[93] 地球ゴマをとりつけた二輪車はコマを回すと安定性が格段に良くなる。なぜか。（Joshin SONE 制作）

歳差運動



1. 慣性モーメント $\boldsymbol{I}$、を有するコマが角速度$\vec{\omega}$で反時計回りの回転運動をしている。
2. このとき、コマは次の大きさの角運動量、$\vec{L}$、を持つ。

$$\vec{L} \;=\; I\,\vec{\omega} \qquad (1)$$

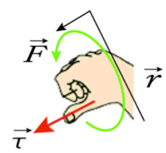


$\vec{L}$の向きは、「右手親指の向き」（約束事）

3. コマを鉛直上向きからϕだけ傾ける。コマの質量を m とすると、重心に$\vec{F} = m\vec{g}$の重力が鉛直下向きに働く。この重力がコマの角運動量$\vec{L}$に及ぼす影響を検討する。
4. 重心の位置（高さ）を$\vec{h}$とすると、コマに次の力のモーメント、$\vec{\tau}$、が働く。

$$\vec{\tau} \;= \vec{r} \times \vec{F} = \;\vec{h}\; \times\; m\vec{g} \qquad (2)$$

5. 上の式で、”×”は、ベクトル積（外積）で、$\vec{\tau}$の向きは「３指」または「右手親指」で決まる向きであり、重力の向きに垂直である。
6. $\vec{\tau}$の大きさは、　$\tau \;=\; mgh\sin\phi$　　(3)



7. $\vec{\tau}$が運動におよぼす効果は、「回転運動方程式」で求められる。

$$\vec{\tau} \;=\; I\;\vec{\alpha} \;=\; I\,\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \;=\; \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \qquad (4)$$

8. 上式より、　$\Delta\vec{L} \;=\; \vec{\tau}\,\Delta t$　　(5)
9. 式(5)より、$\vec{\tau}$がはたらくと角運動量は$\vec{\tau}$と同じ向きに$\Delta\vec{L}$だけ変化する。つまり、重力がはたらく向きにコマの軸は動かずそれに直交する水平の向きに動く。このためコマは倒れず立ち続ける。また、$\vec{L}$の向きを絶えず変化させ、歳差運動を起こす。
10. 歳差運動は、角運動量$\vec{L}$の水平成分$L\,\sin\phi$を半径とする円運動で表され次が成り立つ。

$$\Delta\vartheta \;\approx\; \frac{\Delta L}{L\,\sin\phi} \qquad (6)$$

11. 歳差運動の角速度ω_p

$$\omega_p \;=\; \underset{(6)}{\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \;=\; \frac{\Delta L}{\Delta t\;L\,\sin\phi}} \;\underset{(5)}{=}\; \frac{\tau\,\Delta t}{\Delta t\,L\,\sin\phi} \;\underset{(3)}{=}\; \frac{mgh\,\sin\phi}{L\,\sin\phi} \;=\; \frac{mgh}{L} \;\underset{(1)}{=}\; \frac{mgh}{I\,\omega} \qquad (7)$$

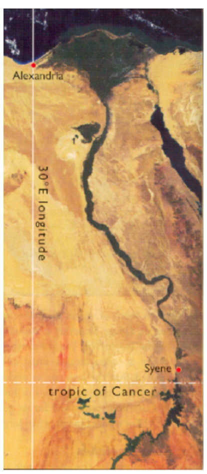
12. ω_pは、コマの傾斜角Φに依存せず、コマの回転が速い（ω大）ほど、慣性モーメント（$\boldsymbol{I}$）が大きいほど、重心の位置 h>0 が低いほど小さい。コマが反時計回りであれば歳差運動も反時計回りになる。
13. 重心の位置がコマの支点に一致すれば軸が傾いていても歳差運動は起こらず（マクスウェルのコマ）。重心の位置が支点より低ければ逆回転になる。

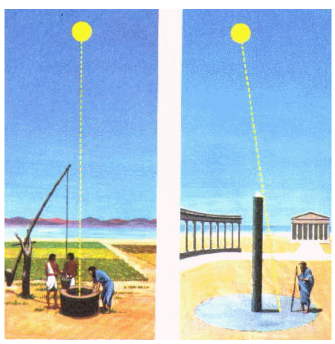
万有引力の法則　Newton's Law of Universal Gravitation

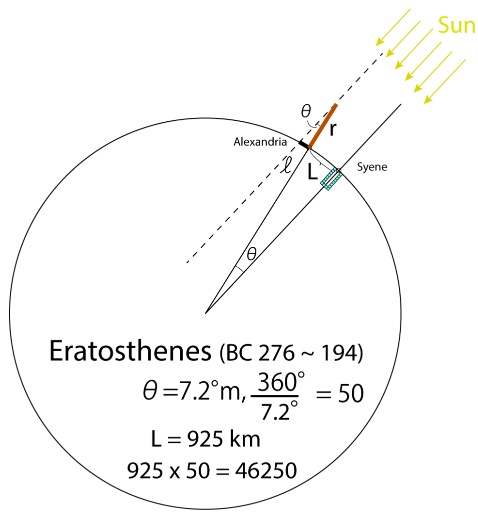
地球に関する数値

平均半径	Mean radius	6371.0 km
赤道半径	Equatorial radius	6378.1 km
極半径	Polar radius	6356.8 km
体積	Volume	1.083×10^{12} km^3
質量	Mass	5.972×10^{24} kg
平均密度	Mean density	5514 kg/m3
赤道の回転速度	Equatorial rotation velocity	465.1 m/s
角速度	Angular velocity	7.272 x 10-5 rad/s

[Q1] エラトステネス（Eratosthenes, BC276 – 194)による地球の大きさの計測







[Q2] 右の図は、1687 年にニュートンが出版した Principia に描かれている図で、「自由落下」と「惑星の軌道運動」を結びつける「思考実験」を述べたものである。説明せよ。　(W380)

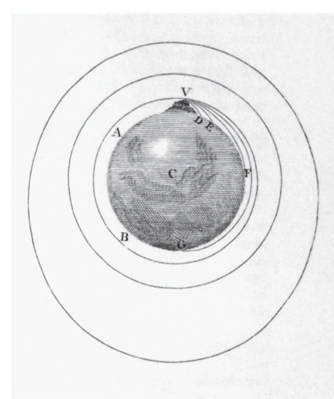


Fig. 2

1. 万有引力の法則

Newton's Law of Universal Gravitation

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

[Q3] 仮に人と犬を質点 point objects と見なすと、105 kg の人間と 11.2 kg の犬が 1.00 m 離れているとき、人間と犬の間にはたらく万有引力を求めよ。

Fig. 2

Fig. 3

[Q4] 万有引力の法則と重力加速度 g の関係を説明せよ。ただし、地球を半径 6.37×10^6 m、質量 5.97×10^{24} kg の均質な真球とする。均質な真球が質点に及ぼす引力は、球の質量がその中心に凝縮した場合と同一であることがニュートンにより証明されている。(II67)

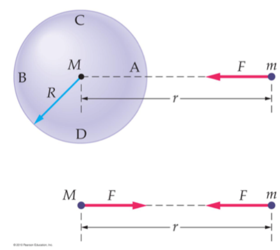


Fig. 4

[Q5] 国際宇宙ステーション(International Space Station, ISS)は、地上約 400 km の上空を飛行している。ISS における重力加速度 g の値を求めよ。地球表面の重力加速度 g の何%か。(II69)

Fig. 5

[Q6] (a) 月の表面における重力加速度 g を求めよ。ただし、月が 1.74×10^6 km の半径を持ち質量が 7.35×10^{22} kg の均質な真球とする。

(b) アームストロング船長が使用した月面車 lunar rover の質量は 225 kg であった。これを月面に置いたキログラム表示のばねばかりで測ったらいくらの重量を示すか。

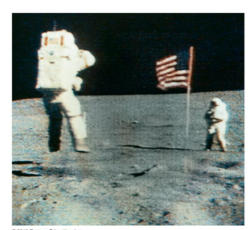


Fig. 6

[Q7] イギリスの物理学者キャベンディッシュ Henry Cavendish は、1798 年に「地球の重さを量る」と称する実験を行った。実際に彼がしたことは、ニュートンの万有引力定数 G を測定することで、ニュートンが法則を発表 1687)して以来およそ 100 年が経過していた。G の正確な測定が「地球の質量」を求めることになることを説明せよ。

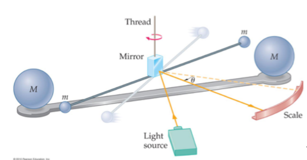


Fig. 7

2. Relation between the mean distance of a planet from the Sun, and its Period (Kepler's Third Law)

$$T^2 \; = \; \left(\frac{4\pi^2}{G\,M_S}\right) r^3$$

（証明　$G\,\frac{m\,M_s}{r^2} \; = \; mr\omega^2\,,\;\; \omega \; = \; \frac{2\pi}{T}$ ）

130-2　ケプラーの法則 Kepler's Laws of Orbital Motion

[Q8] 地動説 heliocentric (or Copernican) theory が生まれた動機は星の観察、とりわけ惑星の動きの観察からであった。それは何か。

[Q9] ケプラーの 3 法則を説明せよ。(II64)

第 1 法則（　　　　の法則）：

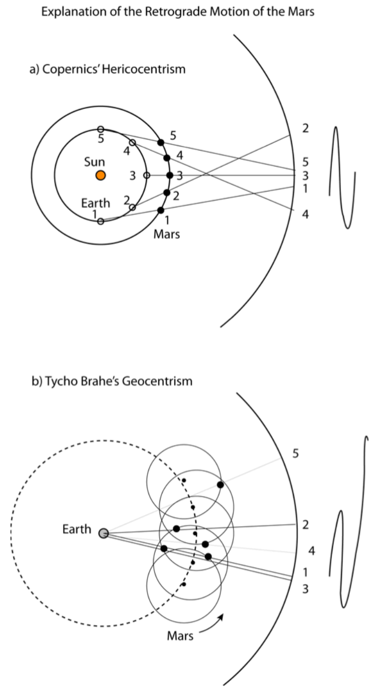
第 2 法則（　　　　　の法則）：

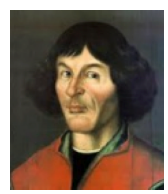
第 3 法則（　　　　の法則）：

[Q10] 紙の上に楕円を描く方法について説明せよ。(II66)

[Q11] 惑星の軌道を円軌道として近似すると、ケプラーの第 3 法則は、$T \; = \; (constant)r^{3/2}$と表される。ここに T は惑星の周期、r は軌道半径である。この法則を万有引力の法則から導け。(II66,W390)

Fig. 8　Retrograde Motion



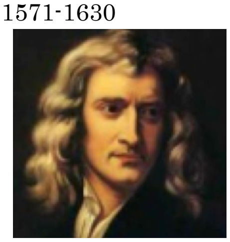


Nicolaus Copernicus
1473-1543

Tycho Brahe
1546-1601

Johannes Kepler
1571-1630

Galileo Galilei
1564-1642



Isaac Newton　　1642 - 1726

[Q12] (a) 地球の軌道半径は 1.50 x 10^{11} m であり、周期は 1 年である。この数値から太陽の質量を求めよ
(b) 水星 Mercury の軌道半径は 5.79 x 10^{10} m である。周期を求めよ。

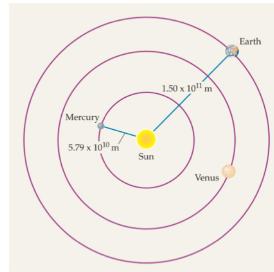


Fig. 12

[Q13] (a) 静止衛星 Geosynchronous Satellite の高度を求めよ。 (b) その軌道の重力加速度 g の値を求めよ。地球表面の重力加速度 g の何%か。

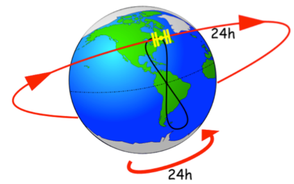


Fig. 13

[Q14] 国際宇宙ステーション(International Space Station, ISS)は、地上約 400 km の上空を飛行している。ISS の速さと周期を求めよ。(II69)


Fig. 14

[Q15] 君は宇宙船の操縦士だ。半径の小さい軌道から半径の大きい軌道に移りたい。どのように操縦すればよいか。(Fig. 15-a) また、逆に半径の大きい軌道から小さい軌道に移るにはどうすればよいか。

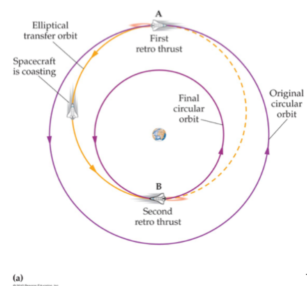


Fig. 15-a

[Q16] 君が地球を周遊する宇宙船を操縦しているとき、数キロメートル先に同じ軌道を周遊している宇宙ステーションを見つけドッキングすることにした。君は次のどちらの操縦をすべきだろうか。(a) 宇宙船の速度を上げるロケットを噴射する。(b) 宇宙船の速度を下げるロケットを噴射する。

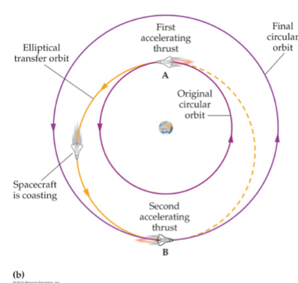


Fig. 15-b

3. 万有引力による位置エネルギー
Gravitational Potential Energy
$$U = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r} \quad [\mathrm{J}]$$

130-3 万有引力による位置エネルギー Gravitational Potential Energy

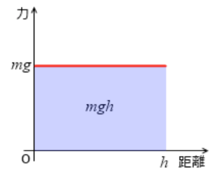


Fig. 17a 重力

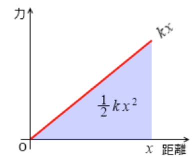


Fig. 17b 弾性力

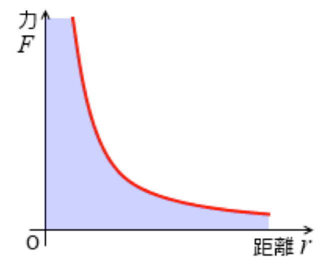


Fig. 17c

・位置エネルギー =―(保存力が基準点からその場所までする仕事)

= 保存力がその場所から基準点までする仕事

$$\Delta U = -W_c$$

1) 重力 $\Delta U = U - U_0 = -W_c$

$$= -\int_0^h (mg)dy\,\cos\theta = -[-mgy]\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} = mgh \quad (\theta = 180°, U_0 = 0)$$

2) 弾性力 $\Delta U = U - U_0 = -W_c$

$$= -\int_0^x (k\,x)dx\,\cos\theta = -\left[-\frac{1}{2}kx^2\right]\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad (\theta = 180°, U_0 = 0)$$

3) 万有引力 $\Delta U = U - U_\infty = -W_c$

$$= -\int_\infty^r \left(-G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\right) dr\,\cos\theta = Gm_1\,m_2 \int_\infty^r \left(\frac{1}{r^2}\right) dr = Gm_1\,m_2\left[-\frac{1}{r}\right]\begin{matrix} r \\ \infty \end{matrix} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r} \quad (\theta = 0°, U_\infty = 0)$$

Gravitational Potential Energy $U = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$ [J]

[Q18] 12.0 kg の隕石 meteorite が次の場所にあるときの万有引力の位置エネルギーを求めよ。(a) 地上より地球の半径の高さの地点、(b) 地球表面。(W395)

$1/(1+x) \approx 1 - x$ where $x \ll 1$

Generally
$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha\,x$ where $x \ll 1$

[Q19] 重力の位置エネルギーの式と万有引力による位置エネルギーの式は一見似ていないように見える。万有引力による位置エネルギーの式から重力の位置エネルギーの式を導け。このとき、右の近似式を用いよ。 (II71, W396)

4. 万有引力の力学的エネルギー保存則
Energy Conservation

$$E = U + K = \frac{1}{2}mv^2 - G\ \frac{m\,M_E}{r}$$

6. 天体の地上への衝突速さ

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

130-4　力学的エネルギー保存則　Energy Conservation

[Q20] (衝突速さ)　地球から無限遠にある天体が地球の引力の影響で地球に衝突する際の速さを求めよ。このような衝突は地球の歴史上無数にあり、650 万年前にユカタン半島に衝突した衝撃で恐竜が絶滅したと考えられている。

Fig. 20

[Q21] 地球から無限遠にある天体が地球の引力の影響で地球に接近し、月の軌道に達したときの速さを求めよ。月の軌道は地球の中心から $60R_E$ (R_E は地球の半径)とし、月の引力の影響は無視できるとする。

[Q22] ある人工衛星は、地球のまわりを楕円軌道で周遊していて、地球に最も近寄る点(近地点 perigee)では地球の中心からの距離が 7.00×10^6 m で速さは 9.00 km/s である。地球から最も遠ざかる点(遠地点 apogee)での速さは 3.66 km/s である。遠地点の地球の中心からの距離を求めよ。

[Q23] 地球の中心から半径 r の円軌道をまわる人工衛星の運動エネルギーK、位置エネルギーU、力学的エネルギーE を求めよ。地球の質量を M、人工衛星の質量を m、万有引力定数を G として表せ。

7. 第２宇宙速度(地球脱出速度)　Escape Speed

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

[Q24]（第２宇宙速度 Escape Speed）　初速度だけ与えて地表から打ち上げたロケットが、その後は加速しないでも地球の引力に逆らって無限遠の彼方に飛び去ってしまうのに必要な初速度を、第２宇宙速度という。これを求めよ。

Fig. 24

[Q25] 第２宇宙速度の半分の初速度で上方に打ち上げたロケットの到達最高高度は地球の中心からいくらか。

[Q26] 南極大陸で見つかった隕石のいくつかは火星から来たものと考えられており、そのうちの一つには火星の原始生命の化石が含まれている。これらは、火星の表面に衝突した小惑星や彗星の衝撃で火星を離れたものであろう。火星表面を離れたときの速度を求めよ。（火星の質量は 6.419 x 10^{23} kg、半径は 3.397 x 10^6 m である。）

130-5　潮汐　　Tides

[Q27] １日２回ずつ起こる満ち潮と引き潮現象がなぜ起こるかを説明せよ。

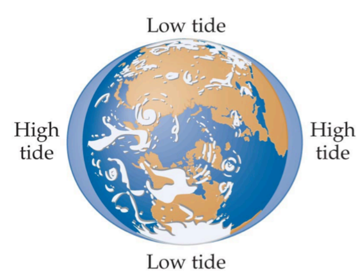


Fig. 27